Računarska grafika

Transformacije u 3D i projekcije

Transformacije u 3D

- I ovde se pretpostavlja konvencija pokretne virtuelne kamere
- Postoji formalna sličnost sa transformacijama u 2D grafici:
  - dodaje se jedan član jednačina (za koordinatu z),
  - dodaje se jedna jednačina (za z')
  - posledica je da matrica transformacije postaje 4x4

$$
\begin{aligned}
x' &= A1\cdot x + B1\cdot y + C1\cdot z + D1\cdot 1\\
y' &= A2\cdot x + B2\cdot y + C2\cdot z + D2\cdot 1\\
z' &= A3\cdot x + B3\cdot y + C3\cdot z + D3\cdot 1\\
1 &= 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 1\cdot 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A1 & A2 & A3 & 0 \\ B1 & B2 & B3 & 0 \\ C1 & C2 & C3 & 0 \\ D1 & D2 & D3 & 1 \end{bmatrix}
$$

Translacija

- Koordinatni početak O(0,0,0) se translatorno pomera u tačku O'(x1,y1,z1):

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x1 & -y1 & -z1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotacije

- U 2D grafici
  - jedna elementarna rotacija (oko koordinatnog početka)
- U 3D grafici
  - 3 elementarne rotacije (oko svake ose koordinatnog sistema)
- Pozitivan smer rotacije oko ose koordinatnog sistema
  - određen pravilom desne zavojnice
- Matrice rotacije oko X ose (Rx) za ugao α,
  oko Y ose (Ry) za ugao β i oko Z ose (Rz) za ugao γ:

$$Rx = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Ry = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Rz = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skaliranje

- Faktori skaliranja za ose X,Y,Z su Sx, Sy i Sz, respektivno
- Matrica skaliranja po sve tri ose:

$$S = \begin{bmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Smicanje (naginjanje)

- Parovi faktora smicanja po X, Y i Z-osi:
  (Hxy,Hxz), (Hyx i Hyz), (Hzx, Hzy), respektivno

$$H = \begin{bmatrix} 1 & Hxy & Hxz & 0 \\ Hyx & 1 & Hyz & 0 \\ Hzx & Hzy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Elementi H_{ab} predstavljaju faktore smicanja po *b*-osi, proporcionalno *a*-koordinati.
- Smicanje samo u pravcu X-ose: Hxy=0, Hzy=0, Hxz=0, Hyz=0
- Smicanje samo u pravcu Y-ose: Hyx=0, Hzx=0, Hxz=0, Hyz=0
- Smicanje samo u pravcu Z-ose: Hyx=0, Hzx=0, Hxy=0, Hzy=0

Složene transformacije

- Kao i kod transformacija u 2D grafici
  - složena transformacija može da se dekomponuje na elementarne
  - određuje se kompozitna matrica složene transformacije množenjem matrica elementarnih transformacija
  - ako je tačka predstavljena vektorom vrstom (važeća pretpostavka) matrice se dodaju u proizvod postkonkatenacijom
- Redosled elementarnih transformacija u složenoj transformaciji je bitan, množenje nije komutativno

Rotacija oko proizvoljne ose (1)

- Problem:
  - izvršiti rotaciju za ugao α oko ose
    koja spaja tačke P1(x1,y1,z1) i P2(x2,y2,z2).
- Rešenje:
  - translacija koordinatnog sistema u tačku P1(x1,y1,z1).
  - rotacija sistema za ugao $-\theta$ oko ose X
    tako da se data linija P1P2 dovede da leži u XoZ‘ ravni

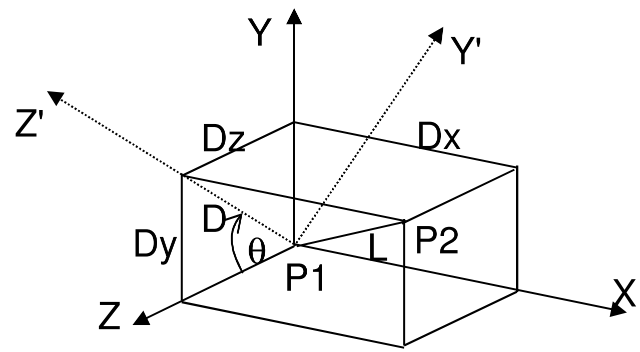
Dx=x2-x1

Dy=y2-y1

Dz=z2-z1

$$D = \sqrt{Dy^2 + Dz^2}$$

$$\sin\theta = Dy/D \qquad \cos\theta = Dz/D$$

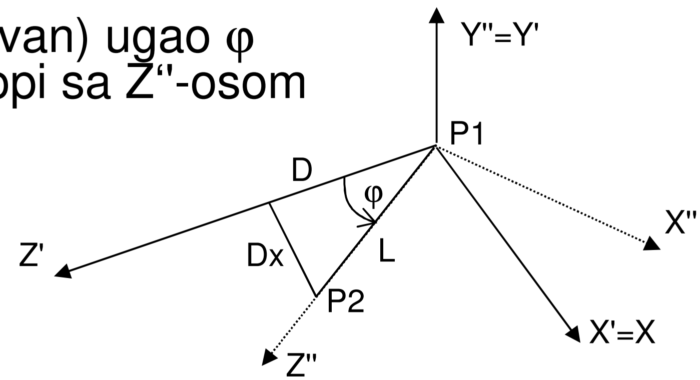


Rotacija oko proizvoljne ose (2)

– rotacija sistema oko Y' za (pozitivan) ugao φ tako da se data linija P1P2 poklopi sa Z‘'-osom

$$L = \sqrt{D^2 + Dx^2} = \sqrt{Dy^2 + Dz^2 + Dx^2}$$

$$\sin\varphi = Dx / L \qquad \cos\varphi = D / L$$

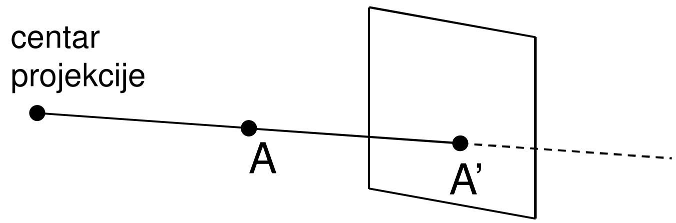


– rotacija sistema oko Z'' za ugao α.
– rotacija sistema oko Y za ugao -φ.
– rotacija sistema oko X za ugao θ.
– translacija u originalni koordinatni početak.

- Kompozitna matrica totalne transformacije:
  R=T*Rx*Ry*Rz*Ry'*Rx'*T'
  (M' je matrica inverzne transformacije za M)

Projekcija

- Generalno, projekcija je transformacija koja preslikava tačku
  - iz koordinatnog sistema sa N dimenzija
  - u koordinatni sistem sa manje od N dimenzija
- Ograničenja (na kursu):
  - na preslikavanje tačke iz 3D scene na 2D površ
  - na planarne geometrijske projekcije
- Planarna geometrijska projekcija 3D tačke se dobija tako što se:
  - prav *projekcioni zrak* (*projektor*) emituje se iz *centra projekcije*
  - projektor prolazi kroz željenu 3D tačku
  - odredi se presek projektora sa *projekcionom ravni*



Osnovne klase projekcija

- Povoljna okolnost je što je projekcija linije takođe linija, te se projektovanje linije svodi na projektovanje krajnjih tačaka
- Dve osnovne klase planarnih geometrijskih projekcija su
  - *perspektivna* i
  - *paralelna*
- Kod perspektivne projekcije
  - centar projekcije i projekciona ravan su na konačnom rastojanju
- Kod paralelne projekcije
  - centar projekcije je beskonačno udaljen od projekcione ravni

Perspektivna projekcija

- Prirodan vizuelni efekat
  - kao kod fotografije i čovekovog vizuelnog sistema
- Efekat se naziva perspektivnim skraćenjem (*perspective foreshortening*):
  - veličina projekcije objekta se menja
    inverzno sa rastojanjem objekta od centra projekcije
- Mane su što na projekciji ne mogu da se mere dužine i uglovi
  - uglovi su realni samo za stranice objekta
    koje su paralelne sa projekcionom ravni
- Karakteristika perspektivne projekcije svakog skupa paralelnih linija
  koje nisu paralelne projekcionoj ravni
  - skup konvergira u zajedničku "iščezavajuću" (*vanishing*) tačku

Osna iščezavajuća tačka

- *Osna iščezavajuća tačka* (AVP)
  - tačka iščezavanja linija paralelnih osi koordinatnog sistema
- Broj osnih iščezavajućih tačaka je jednak broju osa koje preseca projekciona ravan
  - čest slučaj: centar projekcije na Z-osi a projekciona ravan XoY
    - postoji samo jedna AVP
- U arhitekturi i inženjeringu
  - projekcija sa 2 AVP se koristi često
  - projekcija sa 3 AVP se koristi ređe

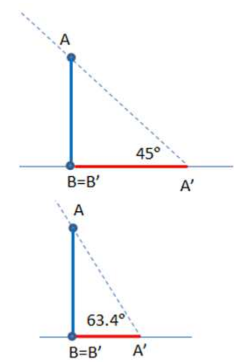
Paralelna projekcija

- Projekcioni zraci (projektori) su paralelni
- Određen je samo pravac i smer projektora
  - vektor: *smer projekcije* (*direction of projection*)
- Generalno, vektor je razlika tačaka u sistemu sa homogenim koordinatama:

  $$v=(x,y,z,1) - (x',y',z',1) = (a, b, c, 0)$$
- Projekcioni zraci paralelni => odnosi $a_P{:}b_P{:}c_P$ za sve tačke P su konstantni
- Perspektivna projekcija sa centrom u beskonačnosti je paralelna projekcija
- Paralelna projekcija ima sledeće osobine:
  - na njoj mogu da se mere rastojanja
    - iako i ovde mogu da budu različita (ali konstantna) skraćenja po svakoj od osa
  - paralelne linije ostaju paralelne (ne postoje iščezavajuće tačke)
  - uglovi su očuvani samo na stranicama tela koje su paralelne projekcionoj ravni

Klasifikacija paralelnih projekcija

- Ortografske (ortogonalne) - smer projekcije normalan na proj. ravan
  - pogled odozgo (*top, plan view*), spreda (*front view*), sa strane (*side view*)
    - projekciona ravan je koordinatna ravan
  - aksonometrijske
    - koristi projekcionu ravan koja nije normalna na ose koord. sistema
    - izometrijska: normala na proj. ravan zaklapa jednake uglove sa sve 3 ose
    - pored izometrijske, postoje dimetrijska i trimetrijska
- Iskošene (*oblique*) - smer projekcije nije normalan na proj. ravan
  - kavaljer
    - smer projekcije zaklapa ugao od 45° sa projekcionom ravni,
    - linije normalne na projekcionu ravan su bez skraćenja
  - kabinet
    - smer projekcije zaklapa ugao od arctg(2)=63.4°
    - linije normalne na projekcionu ravan se skraćuju faktorom 2



Matematičko modelovanje projekcija

- Projekciona ravan je XoY ravan
- Centar projekcije se nalazi na pozitivnoj Z osi i to:
  - ako je centar u tački $P(0,0,+\infty)$ projekcija je ortogonalna (paralelni zraci, normalni na ravan)
  - ako je centar u tački $P(0,0,d\neq+\infty)$ projekcija je sa perspektivom
- Ideja je da se i projekcija tretira kao elementarna transformacija, kako bi matematički aparat bio jednoobrazan

Ortogonalna projekcija

- Svodi se na ignorisanje z komponente tačke (projekciona ravan je z'=0):

  x' = x
  y' = y
  z' = 0

  $$x' = 1\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 0\cdot 1$$
  $$y' = 0\cdot x + 1\cdot y + 0\cdot z + 0\cdot 1$$
  $$z' = 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 0\cdot 1$$
  $$1 = 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 1\cdot 1$$

  $$Po = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Slika tačke treba da bude izražena u 2D:

  $$Po = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  $$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

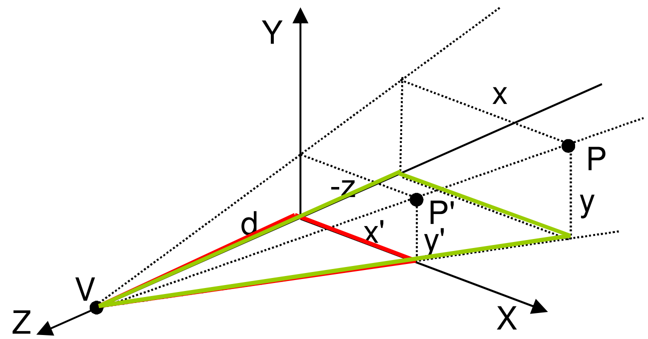
  $Q_{2D} = P_{3D}$*Po

Projekcija sa perspektivom (1)

- Centar projekcije V(0,0,d) leži na pozitivnoj Z osi

$$\frac{x'}{d} = \frac{x}{d+(-z)} \quad \Rightarrow \quad x' = x \cdot \frac{d}{d-z}$$

$$\frac{y'}{d} = \frac{y}{d+(-z)} \quad \Rightarrow \quad y' = y \cdot \frac{d}{d-z}$$



$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{d}{d-z} \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot 1 \\ y' &= 0 \cdot x + \frac{d}{d-z} \cdot y + 0 \cdot 1 \\ 1 &= 0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 \cdot 1 \end{aligned}\right\} \cdot \frac{d-z}{d} = w$$

$$x'' = x' \cdot \frac{d-z}{d} = 1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot 1$$

$$y'' = y' \cdot \frac{d-z}{d} = 0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot 1$$

$$w = 1 \cdot \frac{d-z}{d} = 0 \cdot x + 0 \cdot y + (-\frac{1}{d}) \cdot z + 1 \cdot 1$$

Projekcija sa perspektivom (2)

- U matričnom obliku:

$$[x'' \quad y'' \quad w] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrica projekcije sa perspektivom:

$$Pp = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{d} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Koordinate tačke projekcije se dobijaju:

$$[x' \quad y' \quad 1] = \begin{bmatrix} \frac{x''}{w} & \frac{y''}{w} & 1 \end{bmatrix}$$

- Napomena: za d=0 (centar projekcije u koordinatnom početku)
  - projekcija je nedefinisana

Primer

- Tačka P(3,5,7) se projektuje u tačku Q
- Centar projekcije je u tački V(0,0,10), a projekciona ravan je XoY

$$[3 \quad 5 \quad 7 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 5 \quad 0.3] \Rightarrow [3 \quad 5 \quad 0.3] \ /0.3 = \begin{bmatrix} 10 & \frac{50}{3} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow Q(10, \frac{50}{3})$$